# 第７講　ホイヘンスの原理と波の伝播（波動）

**1**（解答用紙３）

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの各問に答えよ。なお，角度の単位はラジアンとする。

Ⅰ　図１のように，超音波発振器を用いて平面波に近い超音波を板Ａに入射する（板中の直線は波面を表す）。振動数を変化させながら縦波の超音波を板面に垂直に入射したところ，振動数が$f_0$の整数倍になるごとに板が共振した。板Ａの厚さを$h_A$，板Ａ内を伝わる縦波の超音波の速さを$V_A$とする。また，板の両面は自由端とする。

(1)　$f_0$を$h_A$，$V_A$を用いて表せ。

(2)　$V_A = 5.0\times10^3$m/sのとき，振動数$2.0\times10^6$Hzと$3.0\times10^6$Hzの両方で共振が起こった。$h_A$の最小値を求めよ。

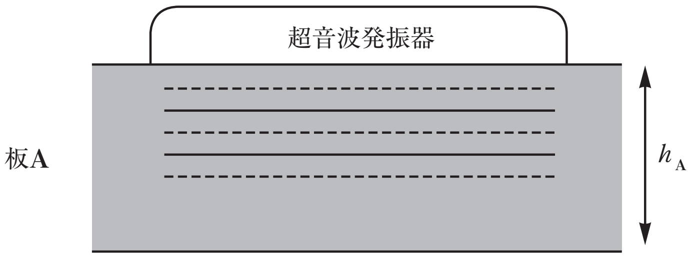



図１

＜ Note ＞

Ⅱ　固体中では縦波と横波の両方が存在する。縦波と横波は速さが異なり，縦波のほうが $k$ 倍($k>1$)速い。図２のように板Ａと，それとは材質の異なる板Ｂを貼り合わせ，２層構造を持つ板を作製した。板Ｂ内を伝わる縦波の速さを $V_B$ とし，$\frac{V_B}{k}>V_A$ とする。また，$k$ の値は物質の種類によらないとする。

板Ａの表面上の点Ｏから，図２のように板Ａ内を角度 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ で伝わる縦波を入射した。すると，境界面で縦波の反射波，屈折波のみならず，横波の反射波と屈折波も発生した。反射角は，縦波と横波についてそれぞれ $\theta$ と $\theta'$ であった。屈折角は，縦波と横波についてそれぞれ $\phi$ と $\phi'$ であった。

⑴　縦波の反射角 $\theta$ が入射角 $\alpha$ と等しくなることをホイヘンスの原理に基づいて考える。図３中の記号Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓを用いて，［　　］を埋めよ。

> 図３において，PQ に平行な波面を持つ入射波が速さ $V_A$ で進んでいる。波面上の２点がそれぞれＰ，Ｑを通過してから時間 $T$ 後，Ｑを通過した側が境界上の点Ｓに達したとする。このとき，Ｐから発せられた素元波が時間 $T$ 後になす半円に対してＳから引いた接線 RS が反射波の波面となる。△PQS と △SRP において，$\angle PQS=\angle SRP=\frac{\pi}{2}$，［ア］＝［イ］$=V_AT$，PS＝SP（共通）であるから △PQS と △SRP は合同である。また，△PQS は ∠PQS を直角とする直角三角形であるから，$\alpha=\angle$［ウ］。同様に，△SRP は ∠SRP を直角とする直角三角形であるから，$\theta=\angle$［エ］。ゆえに，$\alpha=\theta$ である。

⑵　横波の反射角 $\theta'$ について，$\sin\theta'$ を求めよ。

⑶　縦波の屈折角 $\phi$，横波の屈折角 $\phi'$ について，$\sin\phi$ と $\sin\phi'$ を求めよ。

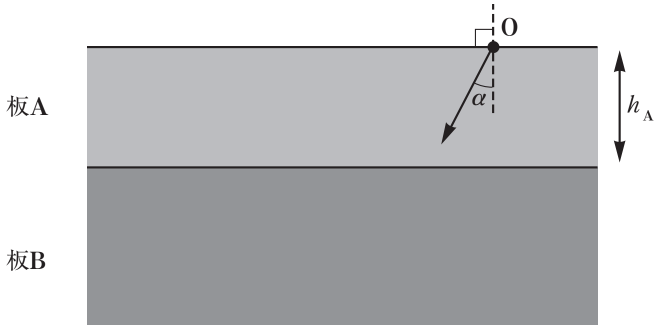


図２

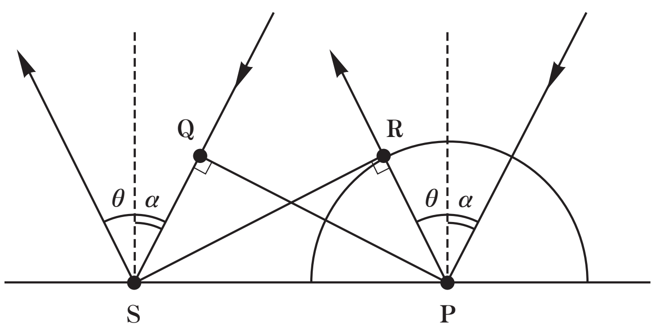


図３

< Note >

Ⅲ　Ⅱで作製した２層構造を持つ板の境界面から深さ $h$ の位置に異物Ｘが存在している。図４のように，Ｏより超音波を入射してから異物表面での反射波がＯに戻ってくるまでの時間を $t$ とする。$t$ の測定値から $h$ を求める方法を考えよう。

(1)　まず，入射角 $\alpha$ を調整し，板Ｂ中を伝わる屈折波が横波だけとなるようにしたい。$\sin\alpha$ の満たすべき条件を求めよ。

(2)　(1)の条件を満たすある入射角 $\alpha$ でＯから縦波を入射したところ，境界上の点Ｙで横波が屈折角 $\phi'$ で板Ｂ中に入射しＸに到達した。その後，同じ経路をたどって反射波がＯに戻ってきた。$t$ を $k$, $h$, $h_A$, $V_A$, $V_B$, $\alpha$, $\phi'$ を用いて表せ。ただしＸの大きさは無視せよ。

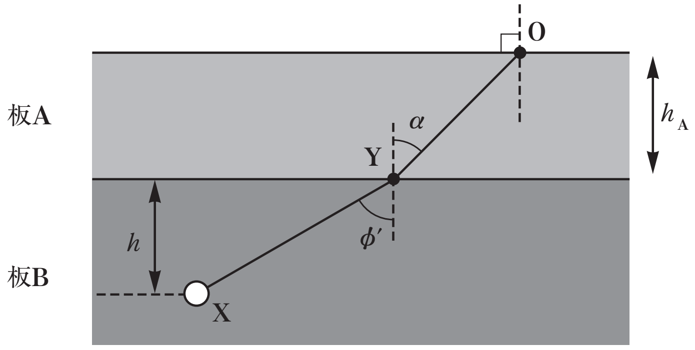



図４

＜ Note ＞

**2**　（解答用紙３）

図１のように $xy$ 平面に広がる水面が，$x$ 軸を境界として水深が異なる２つの領域に分かれている。領域Ａ ($y>0$) における波の速さを $V$, 領域Ｂ ($y<0$) における波の速さを $\dfrac{V}{2}$ とする。簡単のため，波の反射と屈折は境界で起こり，反射する際に波の位相は変化しないと仮定して，以下の設問に答えよ。

Ⅰ　図１のように，領域Ａの座標 $(0,\ d)$ の点Ｐに波源を置く。波源は一定の周期で振動し，まわりの水面に同心円状の波を広げる。

(1)　領域Ａにおけるこの波の波長を $\dfrac{d}{2}$ とする。その波の振動数を，$V$，$d$ を用いて表せ。また，同じ波源が領域Ｂにある場合，そこから出る波の波長を求めよ。

(2)　波長に比べて水深が十分に小さい場合，波の速さ $v$ は重力加速度の大きさ $g$ と水深 $h$ を用いて $v=g^a h^b$ と表される。ここで $a$，$b$ は定数である。両辺の単位を比較することにより $a$，$b$ を求めよ。これを用いて領域Ａの水深は領域Ｂの水深の何倍か求めよ。

(3)　図２のように，波源Ｐから出た波が境界上の点Ｑで反射した後，座標 $(x,\ y)$ の点Ｒに伝わる場合を考える。点Ｑの位置は反射の法則により定まる。このとき，距離 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}$ を，$x$，$y$，$d$ を用いて表せ。

(4)　直線 $y=d$ 上の座標 $(x,\ d)$ の点で，波源から直接伝わる波と境界からの反射波が弱め合う条件を，$x$，$d$ と整数 $n$ を用いて表せ。また，そのような点は直線 $y=d$ 上に何個あるか。

(5)　領域Ｂにおいて波源と同じ位相を持つ波面のうち，原点Ｏから見て最も内側のものを考える。図３のように，その波面と $x$ 軸 ($x>0$) との交点をＴ，$y$ 軸との交点をＳとし，点Ｔにおける屈折角を $\theta$ とする。点Ｓ，Ｔの座標と $\sin\theta$ を求めよ。

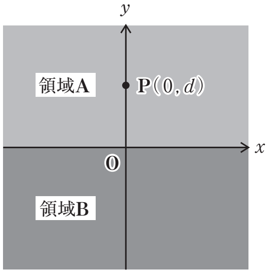


図１

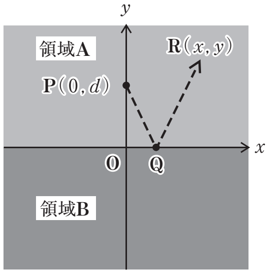


図２

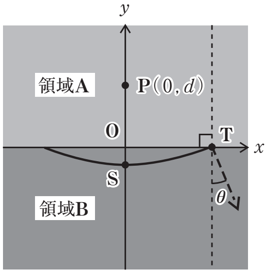


図３

＜ Note ＞

Ⅱ　設問Ⅰと同じ振動数の波源が一定の速さで動いている場合について，以下の設問に答えよ。

(1)　波源が領域Aの $y$ 軸上を正の向きに速さ $u\left(u<\dfrac{V}{2}\right)$ で動いている場合を考える。波源の位置で観測される反射波の振動数を，$V$，$u$，$d$ を用いて表せ。また，領域Bの $y$ 軸上を負の向きに一定の速さ $w\left(w<\dfrac{V}{2}\right)$ で動く点で観測される波の振動数を，$V$，$u$，$w$，$d$ を用いて表せ。

(2)　次に，波源が領域Aの直線 $y=d$ 上を右向きに速さ $u\left(u<\dfrac{V}{2}\right)$ で動いている場合を考える。波源から出た波が境界で反射して波源に戻るまでの時間を，$V$，$u$，$d$ を用いて表せ。

(3)　設問Ⅱ(2)の設定で，波源における波と境界で反射して波源に戻った波が逆位相になる条件を，$u$，$V$ と整数 $m$ を用いて表せ。さらに，この条件を満たす $u$ をすべて求めよ。

＜ Note ＞

# 第７講　確認テスト

（解答用紙３）

図１に示すように，広い水槽に水が張られており，水槽のまっすぐな縁の近くに振動数$f$で振動している波源Ｓがある。図のように座標をとり，波源Ｓの位置を$(0,\ h)$とする。ただし，$h$の値は水面波の波長より大きい。また，水面波の速さを$c$とする。

Ⅰ　波源から水面波が同心円状に広がり，水槽の縁で反射する。このとき，直接波と反射波が干渉し，強めあうところ(腹)と弱めあうところ(節)ができる。そのときの，節を連ねた曲線(節線)の形状を知りたい。

⑴　まず原点Ｏ$(0,\ 0)$での水面の振動の様子を観測したところ，腹であった。そこから$y$軸に沿って正の方向に観測点を移してゆくと，位置$(0,\ d)$で初めて節が見つかった。$d$を求めよ。

⑵　観測点が任意の位置Ｐ$(x,\ y)$（ただし$y>0$）にある場合，直接波と反射波がそれぞれＳからＰに至るまでの経路の長さを求めよ。

⑶　⑵の結果と経路に含まれる波の数を考えて，観測点Ｐ$(x,\ y)$が節になる条件式を$d$を用いて表せ。

⑷　反射波の波面は，水槽の外の点Ｓ′に存在する仮想的な波源がつくる直接波の波面と同等であると考えることができる。そのときのＳ′の座標を求めよ。

⑸　$h=5d$の場合，原点Ｏと波源Ｓの間の$y$軸上で，２つの節が見つかった。この場合の２本の節線の概形を図示せよ。

Ⅱ　次に図２に示すように，水が$x$軸の正の方向に速さ$V$で一様に流れている。波源Ｓの位置は変わらない。この場合の，節の位置を探したい。ただし，$V<c$とする。

⑴　波の速度は，水流がない場合の波の速度(大きさ$c$)と水流の速度(大きさ$V$)の合成速度になる。波源Ｓを出て原点Ｏに至る波の速さと波長を求めよ。また原点で観測される波の振動数を求めよ。

⑵　Ⅰ⑴と同様に，原点から出発して観測点を移してゆくと，位置$(0,\ d')$で初めて節が見つかった。$d'$を求めよ。

＜ Note ＞

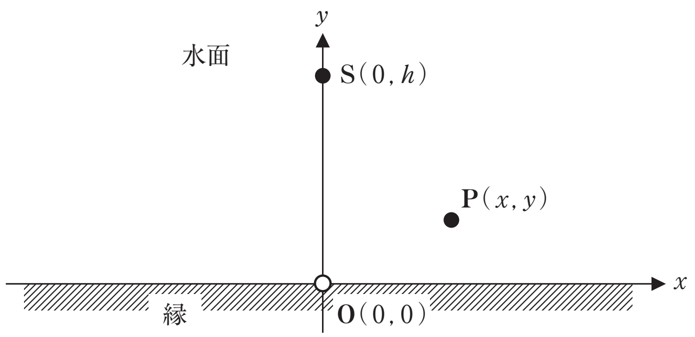



図１

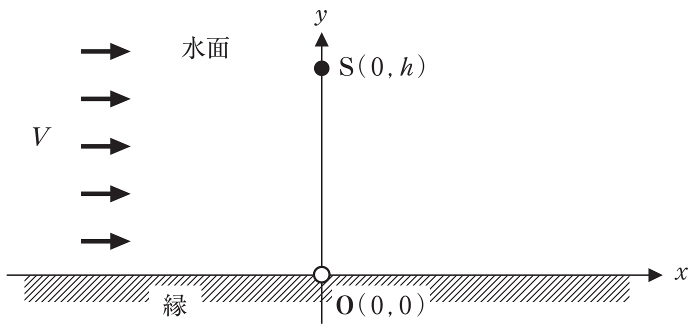



図２

＜ Note ＞

# 第７講　解答

## 1

Ⅰ　(1)　$\dfrac{V_{\mathrm{A}}}{2h_{\mathrm{A}}}$

(2)　2.5mm

Ⅱ　(1)　ア：QS　　イ：PR　　ウ：QPS　　エ：RSP

(2)　$\dfrac{1}{k}\sin\alpha$

(3)　縦波の場合：$\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}\sin\alpha$　　横波の場合：$\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{kV_{\mathrm{A}}}\sin\alpha$

Ⅲ　(1)　$\dfrac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}<\sin\alpha<\dfrac{kV_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}$

(2)　$2\left(\dfrac{h_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{A}}\cos\alpha}+\dfrac{kh}{V_{\mathrm{B}}\cos\phi'}\right)$

## 2

Ⅰ　(1)　$f=\dfrac{2V}{d}$，$\lambda_B=\dfrac{d}{4}$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$，領域Ａの水深は領域Ｂの４倍

(3)　$\sqrt{x^2+(y+d)^2}$

(4)　条件：$\sqrt{x^2+4d^2}-|x|=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{d}{2}$，

$y=d$ 上で弱めあう点の個数：８個

(5)　S：$\left(0,\ -\dfrac{d}{4}\right)$，T：$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}d,\ 0\right)$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

Ⅱ　(1)　波源の位置で観測：$\dfrac{V-u}{V+u}\cdot\dfrac{2V}{d}$

領域Ｂを動く点で観測：$\dfrac{V-2w}{V+u}\cdot\dfrac{2V}{d}$

(2)　$\dfrac{2d}{\sqrt{V^2-u^2}}$

(3)　条件：$\dfrac{4V}{\sqrt{V^2-u^2}}=m+\dfrac{1}{2}$，$u=\dfrac{\sqrt{17}}{9}V$

# 第７講　確認テスト

【解答】

Ⅰ　(1)　$\dfrac{c}{4f}$　　(2)　直接波：$\sqrt{l_2+(y-h)^2}$　　反射波：$\sqrt{l^2+(y+h)^2}$

(3)　$\sqrt{x^2+(y+h)^2}-\sqrt{x^2+(y-h)^2}=2(2m+1)d$　　(4)　$(0, -h)$

(5)　下図２参照

Ⅱ　(1)　速さ：$\sqrt{c^2-V^2}$　　振動数：$f$　　波長：$\dfrac{\sqrt{c^2-V^2}}{f}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{c^2-V^2}}{4f}$

【解説】

Ⅰ

(1)　$d=\dfrac{\lambda}{4}=\dfrac{c}{4f}$

(2)　直接波：$l=\sqrt{l^2+(y-h)^2}$

Sの，$x$軸に対し対称な点に仮の波源S′を考え，（下図１）

反射波：$l'=\sqrt{l^2+(y+h)^2}$

(3)　反射波のかわりに，S′から出た波を考える。
点Oで腹⇒反射による位相のずれはない。

よって，

$$l'-l=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \therefore \quad \sqrt{x^2+(y+h)^2}-\sqrt{x^2+(y-h)^2}=2(2m+1)d$$

(4)　(2)(3)より，$(0, -h)$

(5)　$h=5d$のとき，$y$軸上の節は，

$y=d,\ 3d$

節線は図２の様な，SとS′を焦点とする双曲線になる。

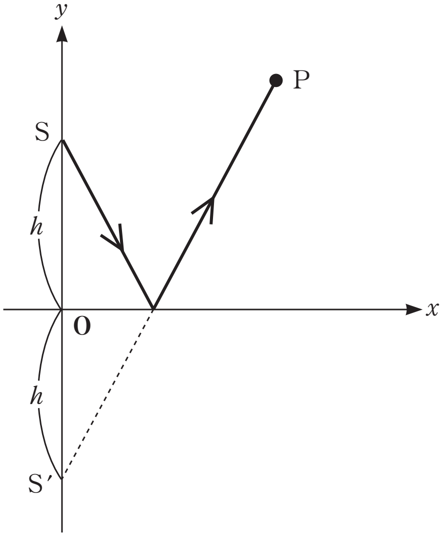


図１

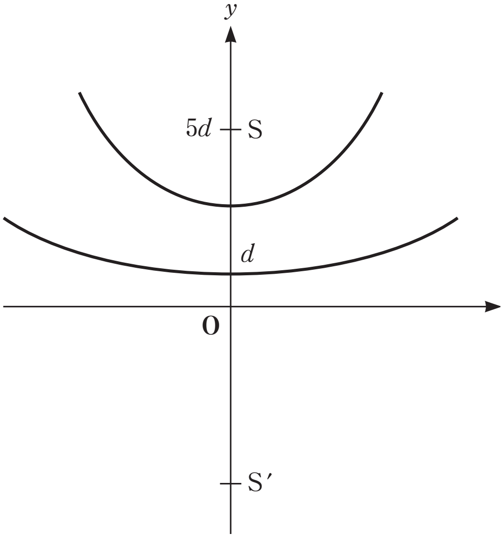


図２

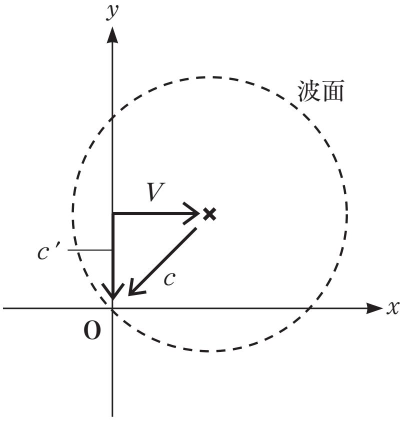
Ⅱ

(1) 波面の中心が，$x$ 軸の正方向へ速さ $V$ で移動すると考えて，

$$c'=\sqrt{c^2-V^2}$$

波源は静止しているので，$f$ は不変。

波長 $\lambda'$ は，

$$\lambda'=\frac{c'}{f}=\frac{\sqrt{c^2-V^2}}{f}$$

(2) $d'=\dfrac{\lambda'}{4}=\dfrac{\sqrt{c^2-V^2}}{4f}$